

DEA-AHP. Cómo combinar dos metodologías de toma de decisiones

Loren Trigo y
Sabatino Costanzo

Estudio IESA No.30

Derechos exclusivos
2006
© IESA
Hecho el depósito de ley
Depósito legal: lfi2392006658531
ISBN: 980-217-301-0

Para ser publicado como Estudio IESA un texto tiene que ser aprobado por el Comité de Publicaciones. Las opiniones expresadas son del autor y no deben atribuirse al IESA, a sus directivos ni a Ediciones IESA. Para cualquier información sobre este estudio, favor dirigirse a Ediciones IESA, apartado 1640, Caracas, Venezuela 1010-A; teléfono: 58-212-555-44-52; fax: 58-212-555-44-45; dirección electrónica: ediesa@iesa.edu.ve.

Contenido

Resumen.....	4
Introducción.....	5
Modelo DEA.....	5
Extensión no satisfactoria del modelo DEA.....	13
Modelo AHP.....	15
Conclusión.....	19
Bibliografía.....	20

Resumen

DEA (*Data Envelopment Analysis*) y AHP (*Analytic Hierarchy Process*) son metodologías de toma de decisiones. Ambas dan como resultado una jerarquización de las opciones que se expresa en un número único asignado a cada opción. DEA utiliza como *input* medidas estrictamente objetivas; AHP utiliza juicios de valor que pueden y suelen ser subjetivos. La finalidad de este artículo es presentar cómo las metodologías DEA y AHP, que suelen usarse separadamente, pueden combinarse en un único modelo que evalúe el desempeño de una entidad dándole una calificación global que combine tanto los valores objetivos como los valores subjetivos del evaluador. La técnica descrita aquí sería de utilidad inmediata en la evaluación del desempeño gubernamental o de entidades sin fines de lucro.

Introducción

En la primera sección de este artículo se explicará el modelo DEA. Se presenta un ejemplo detallado del modelo (y de su puesta en práctica en hoja de cálculo) para la evaluación de desempeño de entidades con base en juicios de valor objetivos. El ejemplo consistirá en la evaluación del desempeño de cuatro hospitales de acuerdo con los *inputs* y *outputs* de los mismos. Se mostrará cómo el modelo DEA permite jerarquizar los hospitales en función de su desempeño y calcular cómo el hospital menos eficiente de los cuatro puede ser sustituido ventajosamente por los tres hospitales relativamente más eficientes. En la segunda sección se presenta la extensión (no satisfactoria) del modelo DEA para incluir juicios subjetivos. Se critica el modelo DEA tradicional y se discute una manera no satisfactoria de añadir juicios de valor subjetivos al modelo DEA mediante la inclusión de restricciones *ad hoc*. En la tercera sección se presenta la extensión del modelo DEA con el modelo AHP. Se explica este último modelo que arroja como resultados la jerarquización de los *outputs* de los hospitales evaluados en la primera y segunda secciones. Una reformulación de esta jerarquización resultante se incorpora al modelo DEA como restricción ya no *ad hoc* sino justificada.

Modelo DEA

El Análisis de Envoltura de Datos (*Data Envelopment Analysis* o DEA), ocasionalmente llamado análisis de frontera, es una aplicación de la programación lineal que se ha utilizado para medir la eficiencia relativa de unidades operativas con metas y objetivos iguales. En la mayor parte de las organizaciones, las unidades operativas tienen múltiples entradas (*inputs*), como tamaño del personal, salarios, horas de operación y presupuesto de publicidad, así como múltiples salidas (resultados o *outputs*), como la utilidad, la penetración en el mercado y la tasa de crecimiento. En estas situaciones, a menudo resulta difícil para un administrador determinar qué unidades operativas son eficientes

al convertir sus diferentes entradas en múltiples resultados. En esta área en particular DEA ha demostrado ser una herramienta administrativa útil, pues puede ser aplicada a operaciones con o sin fines de lucro. Desde que fuera inventada por Charnes, Cooper y Rhodes en 1978, DEA ha sido aplicada a bancos, jefaturas de policía, hospitales, oficinas de recaudación de impuestos, prisiones, bases militares, departamentos universitarios y escuelas. Muchos estudios se han publicado sobre la aplicación de DEA en situaciones del mundo real. Obviamente, hay muchos más estudios no publicados, como los realizados internamente por compañías y por consultores externos.

Supongamos que tenemos como objetivo comparar el desempeño (la eficiencia) de una entidad que forma parte de un grupo de entidades que queremos evaluar. Concretamente supongamos que debemos evaluar la eficiencia de cuatro hospitales: County Hospital, General Hospital, University Hospital y State Hospital, y ordenarlos desde el más ineficiente hasta el más eficiente¹. Los hospitales producen la misma canasta de *inputs* y *outputs* (esto es importante, porque si los *inputs* y *outputs* fueran distintos, la comparación no sería posible). Se han identificado las siguientes tres medidas de entrada y cuatro medidas de resultado:

Medidas de entrada (*input*):

1. El personal no médico en su equivalente a tiempo completo (FTE) *input*₁
2. La cantidad desembolsada en suministros *input*₂
3. Número de días-cama disponibles *input*₃

Medidas de resultado (*output*):

1. Días-paciente de servicio bajo Medicare *output*₁
2. Días-paciente de servicio no bajo Medicare *output*₂
3. Número de enfermeras capacitadas *output*₃
4. Número de médicos internos capacitados *output*₄

¹ Este ejemplo se inspira en Anderson y otros (1999), p. 367.

La eficiencia es un número entre un mínimo = 0 y un máximo = 1 que se calcula dividiendo el valor monetario total de los *outputs* entre el valor monetario total de los *inputs* de una entidad:

<2>

$$\text{eficiencia} = \frac{\text{output}_1 \text{precio}_{out1} + \text{output}_2 \text{precio}_{out2} + \dots}{\text{input}_1 \text{precio}_{in1} + \text{input}_2 \text{precio}_{in2} + \dots}$$

$$\frac{\dots + \text{output}_n \text{precio}_{outn}}{\dots + \text{input}_m \text{precio}_{inm}}$$

donde output_i es la cantidad del output_i , e input_i es la cantidad del input_i . Definida de este modo, la eficiencia es la tasa de conversión de *inputs* en *outputs*. Una eficiencia de 1 implica que los *inputs* se convierten en *outputs* sin pérdida alguna de insumos. Una eficiencia de menos de 1 implica que la conversión de *inputs* en *outputs* sufre una pérdida. Una eficiencia de más de 1 convierte en *output* más *input* del que se tiene, creando *output* de la nada, cosa que no es posible.

Esta comparación en términos de eficiencia tiene, sin embargo, una dificultad: en circunstancias normales, los precios que County Hospital pudiera conseguir para comprar sus *inputs* y vender sus *outputs* no serán necesariamente los mismos que consiga, por ejemplo, General Hospital ya que este último puede comprar barato y vender caro por ser de mayor tamaño y ubicarse en un barrio más próspero. Si los precios difieren, la comparación entre los hospitales deja de ser justa. Por tanto, hay que dejar que el hospital que está siendo evaluado tenga el privilegio de establecer los precios de sus *inputs* y de sus *outputs* de forma tal que ello resulte en la maximización de su propia eficiencia, pero con dos condiciones:

<3>

- (1) que la eficiencia de los demás hospitales sea calculada con base en esos mismos precios y
- (2) que la eficiencia de cada hospital siga siendo un número entre 0 y 1

En conclusión, queremos obtener los precios que maximizan una eficiencia y esto no es otra cosa que una optimización que puede llevarse a cabo con cualquier hoja de cálculo como mostraremos más adelante. Lo primero que haremos es replantear el problema para que sea lineal y

garantizarle así una fácil solución. Para ello diremos que si el hospital que está siendo evaluado es H, nuestro problema de optimización consta de la siguiente función objetivo y restricciones (recordemos que un problema de optimización siempre consta de una función objetivo que se cumple obedeciendo cero o más restricciones):

<4>

Función objetivo:

Maximizar el valor total del *output* de H obedeciendo:

$$\text{MAX: } \text{output}_1 \text{precio}_{out1} + \text{output}_2 \text{precio}_{out2} + \dots + \text{output}_n \text{precio}_{outn}$$

<5>

Primera restricción:

Para cada hospital, el valor total de su *output* debe ser menor o igual al valor total de su *input*:

$$\text{output}_1 \text{precio}_{out1} + \text{output}_2 \text{precio}_{out2} + \dots + \text{output}_n \text{precio}_{outn} \leq \text{input}_1 \text{precio}_{in1} + \text{input}_2 \text{precio}_{in2} + \dots + \text{input}_m \text{precio}_{inm}$$

<6>

Segunda restricción:

El valor total del *input* de H debe ser igual a 1

$$\text{input}_1 \text{precio}_{in1} + \text{input}_2 \text{precio}_{in2} + \dots + \text{input}_m \text{precio}_{inm} = 1$$

La primera restricción dice que para cada hospital de la lista el numerador de su eficiencia (el valor total de su *output*) será mayor o igual al denominador (el valor total de su *input*), garantizando que el cociente, su eficiencia, quedará siempre entre 0 y 1. La segunda restricción dice que en el caso del hospital H, el denominador de su eficiencia será 1, lo cual implica –al cumplirse también la primera restricción– que el numerador de su eficiencia tendrá que ser un número entre 0 y 1. Puesto de otra forma, el valor total del *output* de H coincide con su eficiencia y al maximizar el primero maximizamos la segunda.

Veamos ahora un ejemplo concreto. Evaluemos la eficiencia de County Hospital en relación con la de los otros hospitales de la lista usando la siguiente hoja de cálculo:

<7>

Microsoft Excel - myHospitalDEAPaperPart1.xls

File Edit View Insert Format Tools Data StatPro Window Help Acrobat

Arial 10 B I U

F13 =

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Modelo DEA para evaluar la eficiencia del hospital seleccionado										
2						Run Solver					
3	Hospital seleccionado	2									
4											
5	Inputs aceptados	Input 1	Input 2	Input3		Outputs producidos	Output 1	Output 2	Output 3	Output4	
6	University Hospital 1	162.3	128.7	64.21		University Hospital 1	34.62	27.11	148	27	
7	County Hospital 2	275.7	348.5	104.1		County Hospital 2	36.72	45.98	175	23	
8	State Hospital 3	210.4	154.1	104.04		State Hospital 3	33.16	56.46	160	84	
9	General Hospital 4	285.2	123.8	106.72		General Hospital 4	48.14	43.1	253	41	
10											
11	Costo/Unidad inputs	0.006	0.000	0.000		Precio/Unidad outputs	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
12											
13	Restricción que los costos de input deben cubrir los valores de output										
14	Hospital	Input costs		Output Values							
15	1	1.000	>=	0.000							
16	2	1.699	>=	0.000							
17	3	1.296	>=	0.000							
18	4	1.757	>=	0.000							
19											
20	Restricción que el hospital seleccionado debe tener in costo de input igual a 1										
21	Selected hospital input co	1.699	=	1							
22											
23	Maximice el valor del output del hospital seleccionado (si es 1, es eficiente)										
24	Selected hospital output	0.000									
25											
26											
27											
28											
29											
30											

Sheet1 Model/

Draw AutoShapes

Ready

Start DEAHOSPITAL.doc - Mic... Microsoft Excel - myH... 7:31 PM

El hospital que estamos evaluando es County Hospital (el hospital 2), cuyo índice (2) aparece en B3. Hemos introducido los *inputs* de los cuatro hospitales en la tabla B6:D9 (sombreados) y los *outputs* en la tabla G6:I9 (también sombreados). Los costos por unidad de los *inputs* 1, 2 y 3 están en la tabla B11:D11 y los precios por unidad de los *outputs* 1, 2, 3 y 4 están en la tabla G11:I11, ambos enmarcados en rojo. Nótese que antes de ejecutar

Solver, los costos y precios de los *inputs* y *outputs* comienzan por ser iguales a cero. Estos costos y precios son los que Solver calculará al maximizar la eficiencia del County Hospital, la cual está en B24 y también es cero, enmarcada con línea doble. Para ejecutar el algoritmo de maximización sólo hay que configurar Solver como se muestra a continuación. Abrimos la ventanilla Solver Parameters, usamos el menú Tools>Solver:

<8>

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled "myHospitalDEAPaperPart1.xls". The spreadsheet is organized into columns A through K. The data is as follows:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
1	Modelo DEA para evaluar la eficiencia del hospital seleccionado											
2												
3	Hospital seleccionado	2				Run Solver						
4												
5	Inputs aceptados	Input 1	Input 2	Input3		Outputs producidos	Output 1	Output 2	Output 3	Output4		
6	University Hospital 1	162.3	128.7	64.21		University Hospital 1	34.62	27.11	148	27		
7	County Hospital 2	275.7	348.5	104.1		County Hospital 2	36.72	45.98	175	23		
8	State Hospital 3	210.4	154.1	104.04		State Hospital 3	33.16	56.46	160	84		
9	General Hospital 4	285.2	123.8	106.72		General Hospital 4	48.14	43.1	253	41		
10												
11	Costo/Unidad inputs	0.000	0.000	0.010		Precio/Unidad outputs	0.0000	0.0122	0.0019	0.0000		
12												
13	Restricción que los costos de input deben cubrir los valores de output											
14	Hospital	Input costs		Output Values								
15	1	0.617	>=	0.617								
16	2	1.000	>=	0.900								
17	3	0.999	>=	0.999								
18	4	1.025	>=	1.015								
19												
20	Restricción que el hospital seleccionado debe tener in costo de input igual a 1											
21	Selected hospital input cc	1.000	=	1								
22												
23	Maximice el valor del output del hospital seleccionado (si es 1, es eficiente)											
24	Selected hospital output	0.9000										
25												
26												
27												
28												
29												
30												

The Solver Parameters dialog box is open, showing the following settings:

- Set Target Cell: $B24$
- Equal To: ☒ Max ☐ Min ☐ Value of: 0
- By Changing Variable Cells: $G11:J11$
- Subject to the Constraints:
 - $B21 = 1$
 - $D15:D18 \leq B15:B18$

y llenamos las cajitas como se muestra en la lámina. La cajita llamada Target Cell es la celda que queremos que Solver maximice, B24. Esta celda contiene el valor monetario de los *outputs* del County Hospital que coincide con su eficiencia, a saber:

B24 contiene:

$$36.72 * \text{precio}_{out1} + 45.98 \text{precio}_{out2} + 175 \text{precio}_{out3} + 23 \text{precio}_{out4}$$

o su equivalente en Excel $G7 * G11 + H7 * H11 + I7 * I11 + J7 * J11$.

La cajita Changing Cells contiene los costos y precios que estamos buscando, es decir, las celdas enmarcadas en rojo: B11:D11 y G11:J11.

La cajita llamada Constraints contiene las restricciones de la maximización <4>; es decir,

la restricción

$$D15:D18 \leq B15:B18$$

expresa la primera restricción que vimos anteriormente en <5>: para cada hospital, el valor total de su *output* debe ser menor o igual al valor total de su *input*. Por ejemplo, B15 y D15 contienen, respectivamente, el valor total del *input* y el valor total del *output* de University Hospital:

D15 contiene

$$34.62 \text{precio}_{out1} + 27.11 \text{precio}_{out2} + 148 \text{precio}_{out3} + 27 \text{precio}_{out4}$$

y B15 contiene

$$162.3 \text{precio}_{in1} + 128.7 \text{precio}_{in2} + 64.21 \text{precio}_{in3}$$

o su equivalente en Excel

$$G6 * G11 + H6 * H11 + I6 * I11 + J6 * J11 \text{ y}$$

$$B6 * B11 + C6 * C11 + D6 * D11, \text{ respectivamente.}$$

La restricción

$$B21 = 1$$

expresa la segunda restricción que vimos arriba en <6>, que dicta que el valor total del *input* del hospital H debe ser igual a 1, pues B21 contiene el valor total de los inputs de County Hospital, de modo que aquí tenemos:

B21 contiene

$$275.7 \text{ precio}_{in1} + 348.5 \text{ precio}_{in2} + 104.1 \text{ precio}_{in3}$$

o su equivalente en Excel

$$B7*B11+C7*C11+D7*D11.$$

Ya casi hemos terminado de configurar Solver para ejecutar la optimización. Ahora sólo falta pulsar el botón Options (que abre la ventanilla Solver Options) y seleccionar Assume Linear Model y Assume Non Negative. Estas dos opciones le

dicen a Solver que utilice el algoritmo de programación lineal –el método *simplex*– y que mantenga los precios y los costos iguales o mayores a cero. Pulsamos el botón OK para regresar a la ventanilla Solver Parameters y allí pulsamos el botón Solve.

El resultado aparece en la casilla B24 enmarcada con doble línea de la lámina <8>: el valor total del *output* de County Hospital (es decir, su eficiencia relativa) es 0.9. Para entender este resultado tenemos que considerar qué sucede cuando ejecutamos Solver de nuevo, esta vez para evaluar la eficiencia de University Hospital como hacemos en <9>.

En este caso la eficiencia relativa resultante en la casilla B24 enmarcada con doble línea es 1, lo cual implica que ningún hospital de la lista es más eficiente que University Hospital, y que County Hospital es 90 por ciento tan eficiente como

<9>

Microsoft Excel - myHospitalDEAPaperPart1.xls

File Edit View Insert Format Tools Data StatPro Window Help Acrobat

Arial 10 B I U

F13 =

Modelo DEA para evaluar la eficiencia del hospital seleccionado				Run Solver				
Hospital seleccionado 2								
Inputs aceptados	Input 1	Input 2	Input3	Outputs producidos	Output 1	Output 2	Output 3	Output4
University Hospital 1	162.3	128.7	64.21	University Hospital 1	34.62	27.11	148	27
County Hospital 2	275.7	348.5	104.1	County Hospital 2	36.72	45.98	175	23
State Hospital 3	210.4	154.1	104.04	State Hospital 3	33.16	56.46	160	84
General Hospital 4	285.2	123.8	106.72	General Hospital 4	48.14	43.1	253	41
Costo/Unidad inputs	0.006	0.000	0.000	Precio/Unidad outputs	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Restricción que los costos de input deben cubrir los valores de output								
Hospital	Input costs	Output Values						
1	1.000	>=		0.000				
2	1.699	>=		0.000				
3	1.296	>=		0.000				
4	1.757	>=		0.000				
Restricción que el hospital seleccionado debe tener in costo de input igual a 1								
Selected hospital input c	1.699	=		1				
Maximice el valor del output del hospital seleccionado (si es 1, es eficiente)								
Selected hospital output	0.000							

Sheet1 Model

Draw AutoShapes

Ready

Start DEAH&AHP DEAHOSPITAL.doc - Micr... Microsoft Excel - myH...

7:31 PM

University Hospital, cuya eficiencia es del 100 por ciento. En DEA siempre ocurre que al menos una entidad de la lista resulta con 100 por ciento de eficiencia, y las demás tienen una eficiencia relativa igual o menor. Esto quiere decir que una entidad W es relativamente menos eficiente cuando, aun escogiendo los costos y precios que maximizan su eficiencia (la de W, digamos los costos 3, 4, 5 y los precios 6, 7, 8), en la lista de comparación (que consta de las entidades X, Y, Z) existe al menos una entidad (es decir, Y) que utilizando esos mismos precios y costos (los costos 3, 4, 5 y los precios 6, 7, 8) resulta ser más eficiente (que W).

La formulación de DEA que acabamos de ver es una de varias formulaciones posibles. Otra manera de implementar los mismos conceptos tiene relevancia al momento de eliminar la entidad ineficiente, cosa que puede suceder en caso de fusión de dependencias públicas o privadas. En el ejemplo que estamos desarrollando, todos los hospitales de la lista son 100 por ciento eficientes con excepción de County Hospital, el cual es 90 por ciento eficiente. Como County Hospital es relativamente ineficiente, vale la pena cerrarlo y sustituirlo haciendo que los hospitales restantes y 100 por ciento eficientes expandan sus operaciones para suministrar los servicios que County Hospital suplía. En consonancia con esta intuición, en DEA se define un hospital virtual construido con participación de los tres hospitales remanentes de la lista. Por ejemplo, una posibilidad sería que una cuarta parte del hospital virtual se construyera expandiendo General Hospital, otra cuarta parte expandiendo University Hospital y dos cuartas partes expandiendo State Hospital. Si este hospital virtual lograra suplir los servicios de County Hospital a menos costo, entonces no sólo confirmaríamos que County Hospital es relativamente menos eficiente, sino que sabríamos cómo repartir sus servicios entre los hospitales restantes para mayor eficiencia. Una vez más, el problema se resuelve fácilmente con una hoja de cálculo como veremos más abajo.

En el caso concreto de County Hospital, vamos a crear un hospital compuesto y virtual como una suma sopesada de los cuatro hospitales: General,

County, State y University (la participación de County Hospital en este hospital compuesto será, cuando Solver haya ejecutado y "hecho las cuentas", cero). Como el hospital compuesto debe ser más eficiente que County Hospital, tendrá que producir más (o igual) cantidad de *output* que County Hospital utilizando igual (o menos) cantidad de *input*. Formalmente, si el hospital que está siendo sustituido es H, las siguientes tres restricciones aplican (donde *weight* significa "peso"):

<10>

Primera restricción:

Para cada $input_i$, la suma sopesada del $input_i$ del hospital compuesto debe ser estrictamente menor que el $input_i$ de H:

$$(input_{ihosp1})weight_{hosp1} + (input_{ihosp2})weight_{hosp2} + (input_{ihosp3})weight_{hosp3} + (input_{ihosp4})weight_{hosp4} < input_{ihosp2}$$

<11>

Segunda restricción:

Para cada $output_i$, la suma sopesada del $output_i$ del hospital compuesto debe ser mayor o igual que el $output_i$ de H:

$$(output_{ihosp1})weight_{hosp1} + (output_{ihosp2})weight_{hosp2} + (output_{ihosp3})weight_{hosp3} + (output_{ihosp4})weight_{hosp4} \geq output_{ihosp2}$$

<12>

Tercera restricción:

La suma de los pesos de los hospitales remanentes debe ser igual a 1

$$weight_{hosp1} + weight_{hosp2} + weight_{hosp3} + weight_{hosp4} = 1$$

Sin embargo, la primera restricción de esta formulación no se puede implementar en Excel porque Solver no tiene forma de aplicar restricciones de signo estrictamente menor o estrictamente mayor. La siguiente formulación en <13> <14> <15> y <16> sustituye el signo estrictamente menor (es decir, "<") de la primera restricción por el signo "menor-o-igual-a" (es decir, "=") seguido de un nuevo factor F que deberemos minimizar para lograr un efecto análogo al del signo estrictamente menor:

<13>

Función objetivo:

Minimizar F

MIN F

obedeciendo:

<14>

Primera restricción:

Para cada $input_i$, la suma sopesada del $input_i$ del hospital compuesto debe ser un porcentaje del $input_i$ de H:

$$(input_{ihosp1})weight_{hosp1} + (input_{ihosp2})weight_{hosp2} + (input_{ihosp3})weight_{hosp3} + (input_{ihosp4})weight_{hosp4} \leq (F)input_{ihosp2}$$

<15>

Segunda restricción:

Para cada $output_i$, la suma sopesada del $output_i$ del hospital compuesto debe ser mayor o igual que el $output_i$ de H:

$$(output_{ihosp1})weight_{hosp1} + (output_{ihosp2})weight_{hosp2} + (output_{ihosp3})weight_{hosp3} + (output_{ihosp4})weight_{hosp4} \geq output_{ihosp2}$$

<16>

Tercera restricción:

La suma de los pesos de los hospitales remanentes debe ser igual a 1:

$$weight_{hosp1} + weight_{hosp2} + weight_{hosp3} + weight_{hosp4} = 1$$

Lo que queremos es que la suma sopesada de *inputs* del hospital compuesto del lado izquierdo del signo en <14> equivalga a un porcentaje de los *inputs* correspondientes a H (el hospital que estamos sustituyendo). Por tanto F = la fracción del $input_i$ de H disponible para el hospital compuesto. Si tras minimizar F, $F = 1$, el hospital compuesto requiere tantos *inputs* como H y no hay evidencia de que H sea ineficiente. Si $F < 1$, el hospital compuesto requiere menos *inputs* que H para producir igual o más *outputs*, es decir, el hospital compuesto es más eficiente que H por lo que se puede juzgar que H es relativamente ineficiente. A continuación mostramos el problema configurado en hoja de cálculo.

En <17> aparecen una vez más los *inputs* y *outputs* de los hospitales (celdas sombreadas). Enmarcadas en rojo aparecen las celdas de los pesos asignados a cada hospital que utilizaremos para construir el hospital compuesto. Enmarcada con línea doble vemos la celda que contiene el factor F que vamos a minimizar. La ventanilla de Solver Parameters que hemos abierto con Tools>Solver contiene, en la cajita Set Target Cell, B37, que contiene el factor F, que Solver debe minimizar. Vemos en la cajita Changing Cells, las celdas de los pesos que estamos buscando, B32:B35. En la cajita Constraints aparecen las tres restricciones que acabamos de listar. La restricción

$$B49:D49 \leq B51:D51$$

equivale a la primera restricción dada arriba en <14>, al efecto de que para cada $input_i$, la suma sopesada del $input_i$ del hospital compuesto debe ser un porcentaje del $input_i$ de County Hospital. Por ejemplo B49 y B51 se refieren a la utilización del $input_i$ en el hospital compuesto y en County Hospital, respectivamente:

$$162.3weight_{hosp1} + 210.4weight_{hosp3} + 285.2weight_{hosp4} \leq F * 275.7_{hosp2}$$

o en términos de Excel,

$$B32*B40+B34*B42+B35*B43 \leq B51$$

La restricción

$$G49:J49 \leq G51:J51$$

equivale a la segunda restricción discutida arriba en <15> a efecto de que para cada $output_i$, la suma sopesada del $output_i$ del hospital compuesto debe ser mayor o igual que el $output_i$ de County Hospital. Su tratamiento es similar al de la primera restricción sin el factor F.

La restricción

$$B46 = 1$$

dice que la suma de los pesos debe ser igual a 1, como dice la restricción <16>, pues B55 contiene la suma de los pesos B32+B33+B34+B35. Ahora sólo falta pulsar el botón Options (que abre la ventanilla Solver Options) y seleccionar Assume

<17>

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled "myHospitalDEAPaperPart2.xls". The Solver Parameters dialog box is open, showing the following settings:

- Set Target Cell: $B37$
- Equal To: ☐ Max ☒ Min ☐ Value of: 0
- By Changing Cells: $B32:B35, B37$
- Subject to the Constraints:
 - $B349:D49 \leq B51:D51$
 - $B55 = 1$
 - $G49:J49 \geq G51:J51$

The spreadsheet contains the following data:

	Input 1	Input 2	Input 3	Output 1	Output 2	Output 3	Output 4
University Hospital 1	162.3	128.7	64.21	34.62	27.11	148	27
County Hospital 2	275.7	348.5	104.1	36.72	45.98	175	23
State Hospital 3	210.4	154.1	104.04	33.16	56.46	160	84
General Hospital 4	285.2	123.8	106.72	48.14	43.1	253	41

Below the data table, there are constraints for the hospital compound:

inputs:	0	0	0	0	0	0	0
Hospital Compuesto	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$
F*County Hospital 2	0	0	0	0	36.72	45.98	175

Below the constraints, there is a restriction that the weights must sum to 1:

0	=	1

Linear Model y Assume Non Negative. Pulsamos el botón OK para regresar a la ventanilla Solver Parameters y el botón Solve para obtener los pesos. El resultado aparece en <18>: County Hospital resulta ser relativamente ineficiente frente al hospital compuesto ya que $F = .903$ en $B37^2$. Para mayor eficiencia, County Hospital debe sustituirse con la siguiente participación de los hospitales de la lista: University Hospital, 30 por ciento;

County Hospital, 1 por ciento; State Hospital, 53 por ciento; General Hospital, 17 por ciento; es decir, los pesos que aparecen enmarcados en rojo en $B32:B35$. La participación de County Hospital de 1 por ciento en el hospital compuesto significa que para efectos prácticos la sustitución de County Hospital será total (tendrá una participación de casi 0 por ciento).

²El hecho de que el valor del factor F y el de la eficiencia de County Hospital coinciden no es casualidad. El planteamiento en términos de precios y costos de los *inputs-outputs* y el planteamiento en términos de los pesos de participación de los hospitales resuelven el mismo problema de fondo. En programación lineal el segundo planteamiento es el dual del primero. La función objetivo que se maximiza en el original tendrá siempre el mismo resultado que la función objetivo que se minimiza en el dual.

La solución una vez Solver haya ejecutado es:

<18>

Solver Parameters

Set Target Cell: **\$B\$37**

Equal To: ☐ Max ☒ Min ☐ Value of: **0**

By Changing Cells: **\$B\$32:\$B\$35, \$B\$37**

Subject to the Constraints:

- \$B\$49:\$D\$49 <= \$B\$51:\$D\$51**
- \$B\$55 = 1**
- \$G\$49:\$J\$49 >= \$G\$51:\$J\$51**

Restricciones sobre inputs y outputs del hospital compuesto

	Input 1	Input 2	Input 3	Output 1	Output 2	Output 3	Output 4
University Hospital 1	162.3	128.7	64.21	34.62	27.11	148	27
County Hospital 2	275.7	348.5	104.1	36.72	45.98	175	23
State Hospital 3	210.4	154.1	104.04	33.16	56.46	160	84
General Hospital 4	285.2	123.8	106.72	48.14	43.1	253	41

Restricción que los pesos deben sumar 1

	1	=	1
Hospital Compuesto	212.840197	<=	146.2375844
F*County Hospital 2	249.001461	<=	314.7515752

Extensión no satisfactoria del modelo DEA

Hemos visto cómo DEA hace posible la comparación de entidades especialmente difíciles de comparar, como las entidades sin fines de lucro, eliminando los factores accidentales —como localización— que pudieran causar iniquidades a la hora de asignar costos y precios. Hemos visto también cómo DEA nos permite obtener la suma sopesada de las entidades más eficientes que podrían sustituir a la entidad ineficiente. Pero, al dejar correr libremente los costos y precios (o los pesos de participación) para maximizar la eficiencia de la entidad que está siendo evaluada (o para sustituirla), hemos perdido de vista el hecho que

ciertos *inputs*, ciertos *outputs* y en consecuencia ciertas entidades son más valiosos que otros ya sea como objetos de intercambio o como factores contribuyentes al bienestar de una comunidad. Por ejemplo, como resultado de la evaluación de County Hospital, DEA le asigna un costo de 0 a los *inputs* 1 y 2 y un precio de 0 a los *outputs* 1 y 4. Esto no sólo es poco realista sino que podría entrar en conflicto con los intereses de la comunidad, la cual probablemente considere el *output* 1 (los días-paciente bajo Medicare) como el *output* más importante de todos. Otro ejemplo: para efectuar la sustitución de County Hospital, DEA le asigna una participación mayoritaria a State Hospital y a University Hospital, aunque los vecinos de County Hospital quizás preferirían la expansión de General Hospital que les queda más cerca.

La solución a este tipo de problemas es añadir restricciones *ad hoc* al modelo DEA para que sus resultados se ajusten mejor a la realidad o a las preferencias de la comunidad. Podríamos, por ejemplo, implementar un juicio de valor añadiendo la restricción de que el precio (o valor social) del output "días-paciente bajo Medicare" sea diez veces mayor que el del output "número de enfermeras capacitadas":

<19>

$$\text{precio}_{out1} = 10 \text{precio}_{out3}$$

El efecto que esta restricción adicional tendría en la evaluación de County Hospital sería la eliminación del resultado anterior que le asignaba un precio de cero a los días-paciente bajo Medicare, que es lo que queríamos, y su sustitución por un precio mayor que cero en G1. Nótese que el cam-

bio afecta negativamente la eficiencia de County Hospital en B24 (antes en <8> era .9, ahora en <20> es .889):

De forma similar, en el modelo de sustitución de County Hospital podríamos añadir una restricción al efecto de que la participación de General

$$\text{weight}_{hosp4} = \text{weight}_{hosp1}$$

Hospital en el hospital compuesto sea igual a la participación de University Hospital:

<21>

Sin embargo, desde el momento en que nos permitimos incluir en DEA juicios de valor causamos dos nuevos problemas: (1) hay que encontrar la manera de sintetizar los juicios de valor de uno o más individuos y (2) hay que encontrar una manera de purificar los juicios de valor de incoherencias que suelen ocurrir incluso cuando el que juzga

<20>

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled "myHospitalDEAPaperPart3RestriccionAdicional.xls". The spreadsheet is divided into several sections:

- Modelo DEA para evaluar la eficiencia del hospital seleccionado**: This section includes input and output data for four hospitals: University Hospital 1, County Hospital 2, State Hospital 3, and General Hospital 4. It also includes a "Run Solver" button.
- Restricción que los costos de input deben cubrir los valores de output**: This section contains a table with input costs and output values for each hospital, with constraints like "Hospital 1 Input costs >= Output 1 values".
- Restricción que el hospital seleccionado debe tener in costo de input igual a 1**: This section contains a table with input costs and output values for the selected hospital, with constraints like "Selected hospital input costs = 1".
- Maximice el valor del output del hospital seleccionado (si es 1, es eficiente)**: This section contains a table with input costs and output values for the selected hospital, with constraints like "Selected hospital output = 0.889".
- Restricción adicional**: This section contains a table with input costs and output values for the selected hospital, with constraints like "0.0053 = 0.005304031".

The Solver Parameters dialog box is open, showing the following settings:

- Set Target Cell:** \$B\$24
- Equal To:** Max
- By Changing Variable Cells:** \$B\$11:\$D\$11, \$G\$11:\$J\$11
- Subject to the Constraints:**
 - \$B\$21 = 1
 - \$B\$27 = \$D\$27
 - \$D\$15:\$D\$18 <= \$B\$15:\$B\$18

es una sola persona (pues a veces los juicios de valor emitidos por la persona son incoherentes entre sí). Es aquí donde la técnica conocida como *Analytic Hierarchy Process* o Proceso Analítico Jerárquico puede hacer una contribución fundamental al modelo DEA.

Modelo AHP

El Proceso Analítico Jerárquico (*Analytic Hierarchy Process* o AHP) es una metodología de toma de decisiones que utiliza como *input* juicios de valor. Al igual que DEA, AHP da como resultado una jerarquía de las opciones que se expresa en un número único asignado a cada opción. A diferencia de DEA, los juicios de valor que se utilizan como *input* pueden ser subjetivos. AHP fue inventada por Thomas Saaty en 1988 e implementada como software por Expert Choice Inc.

La mejor manera de explicar AHP es con un ejemplo concreto. Supongamos que Ms. Major, la alcaldesa de la ciudad, recibe poco presupuesto y tiene que cerrar uno de los cuatro hospitales de su zona³. Está tratando de determinar cuán valiosos para su comunidad son los *outputs* que cada hospital produce. Recordemos que estos *outputs* eran:

<22> repetición de <1>

Medidas de resultado (*output*):

- | | |
|--|----------------------------|
| 1. Días-paciente de servicio bajo Medicare | <i>output</i> ₁ |
| 2. Días-paciente de servicio no bajo Medicare | <i>output</i> ₂ |
| 3. Número de enfermeras e internos capacitados | <i>output</i> ₃ |
| 4. Número de médicos internos capacitados | <i>output</i> ₄ |

Por razones de espacio, vamos a unificar *output*₃ y *output*₄ en un solo *output*, *output*₃, pero entiéndase que este paso es enteramente opcional. El ejemplo puede hacerse con cuantos *outputs* uno desee.

³ Este ejemplo es parecido al dado por Albright y otros (2001), p. 472 ff.

<23> repetición de <1>

Medidas de resultado (*output*):

- | | |
|--|----------------------------|
| 1. Días-paciente de servicio bajo Medicare | <i>output</i> ₁ |
| 2. Días-paciente de servicio no bajo Medicare | <i>output</i> ₂ |
| 3. Número de enfermeras e internos capacitados | <i>output</i> ₃ |

La alcaldesa planea escoger el hospital que va a cerrar jerarquizando primero los *outputs* de los hospitales en orden de preferencia. Para elaborar esta jerarquización, va a hacer uso de los siguientes 4 criterios:

<24>

- Criterio 1: Cura
- Criterio 2: Educación
- Criterio 3: Prevención
- Criterio 4: Investigación

Cada criterio AHP genera un peso (gracias a un método que describiremos más adelante). Supongamos que los pesos (*weights*) de los criterios de Ms. Major son $w_1 = 0.5115$, $w_2 = 0.0986$, $w_3 = 0.2433$, and $w_4 = 0.1466$. Supongamos además que Ms. Major determina un puntaje (*score*) que refleja hasta dónde cada *output* cumple con cada criterio.

<25>

Puntajes (*scores*) de los criterios cumplidos por cada *output*

	Cura	Educación	Prevención	Investigación
<i>Output</i> 1	0.5714	0.1593	0.0882	0.0824
<i>Output</i> 2	0.2857	0.2519	0.6687	0.3151
<i>Output</i> 3	0.1429	0.5889	0.2431	0.6025

Dados los pesos (azules) para los criterios y los puntajes (rojos) listados en la tabla, Ms. Major puede determinar cómo ordenar los *outputs* de los hospitales. Específicamente, para cada *output* calculamos un puntaje general que es la suma ponderada de los puntajes usando los *weights* como pesos:

<26>

$$\begin{aligned} \text{output}_1 \text{ punt} &= 0.5115(0.5714) + 0.0986(0.1593) + \\ &0.2433(0.0882) + 0.1466(0.0824) = \\ &0.3415 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} output_2 \text{ punt} &= 0.5115(0.2857) + 0.0986(0.2519) + 0.2433(0.6687) + 0.1466(0.3151) = 0.3799 \\ output_3 \text{ punt} &= 0.5115(0.1429) + 0.0986(0.5889) + 0.02433(0.2431) + 0.1466(0.6025) = 0.2786 \end{aligned}$$

Según este puntaje Ms. Major debería jerarquizar los *outputs* como sigue:

<27>

	Jerarquía
<i>Output</i> ₁	.3799
<i>Output</i> ₂	.3415
<i>Output</i> ₃	.2786

La información contenida en esta jerarquía puede presentarse igualmente en términos de las siguientes ecuaciones:

<28>

a.

$$output_1 = \frac{.3415}{.3799} output_2$$

b.

$$output_1 = \frac{.3415}{.3799} output_2$$

las cuales a su vez tienen la misma forma que la restricción *ad hoc* <19>. Específicamente, <28> b. y <19> relacionan *output*₁ con *output*₃, nos dicen cuánto más (o menos) valioso es el *output*₁ en términos del *output*₃:

<29> repetición de <19>

$$precio_{out1} = \frac{10}{1} precio_{out3}$$

restricción equivalente a

$$output_1 = \frac{10}{1} output_3$$

Son justamente ecuaciones como éstas las que podemos añadir como restricciones al modelo DEA que vimos antes para adecuarlo más a la realidad o a los juicios de la comunidad. Pero ahora ya no serían restricciones *ad hoc* sino que tendrían una justificación.

¿Cómo se llega a la jerarquización en <27>? La dificultad esencial del problema es conocer los pesos de los criterios y los puntajes de las opciones. Existen muchos métodos para obtener pesos y puntajes como los que discutimos aquí. El método que vamos a ver es el propuesto por Saaty en términos de pares comparados. Para obtener los pesos y puntajes, Saaty propone que los juicios de valor se cuantifiquen de acuerdo con la siguiente escala semántica:

<30>

Interpretación de los valores de la matriz de pares comparados

Valor de a_{ij} Interpretación

- 1 criterio i y el criterio j son igualmente importantes
- 3 criterio i es ligeramente más importante que j
- 5 criterio i es fuertemente más importante que j
- 7 criterio i es muy fuertemente más importante que j
- 9 criterio i es absolutamente más importante que j

a la cual se le pueden extrapolar valores intermedios a conveniencia. Esta escala semántica se utiliza para calcular los pesos de los criterios, que organizaremos en la matriz que mostramos a continuación.

<31>

	Cura	Educación	Prevención	Investigación
Cura	1	5	2	4
Educación	1/5	1	1/2	1/2
Prevención	1/2	2	1	2
Investigación	1/4	2	1/2	1

Por ejemplo, el número 5 en la fila 1 columna 2 indica que la cura es fuertemente más importante que la educación. Algebraicamente $a_{ij} = 1/a_{ji}$. Por esto, si el criterio i es menos importante que el criterio j , usamos el recíproco del índice apropiado. Finalmente, las celdas diagonales tienen 1 porque para todos los criterios i , usamos la convención de

que $a_{ii} = 1$. Suele ser más fácil determinar todos los a_{ij} que son mayores que 1 y entonces usar la relación $a_{ij} = 1/a_{ji}$ para determinar los demás *inputs*.

La misma escala semántica sirve para calcular los puntajes de las opciones con respecto a cada criterio por separado. Las matrices a continuación contienen esta información.

<32>

Cura	Outp 1	Outp 2	Outp 3
Outp 1	1	2	4
Outp 2	1/2	1	2
Outp 3	1/4	1/2	1

Educación	Outp 1	Outp 2	Outp 3
Outp 1	1	1/2	1/3
Outp 2	2	1	1/3
Outp 3	3	3	1

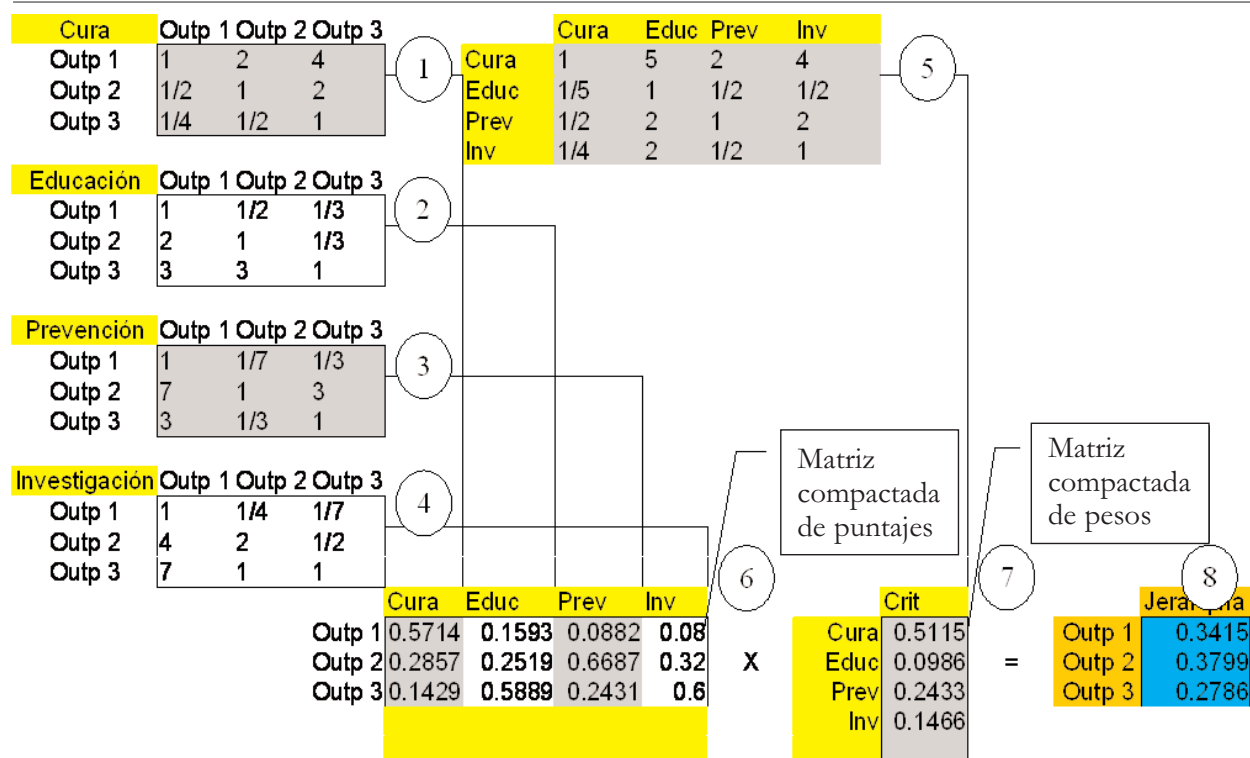
Prevención	Outp 1	Outp 2	Outp 3
Outp 1	1	1/7	1/3
Outp 2	7	1	3
Outp 3	3	1/3	1

Investigación	Outp 1	Outp 2	Outp 3
Outp 1	1	1/4	1/7
Outp 2	4	2	1/2
Outp 3	7	1	1

Por ejemplo, en la matriz de puntajes con respecto al criterio Cura, el valor 2 de la primera fila y segunda columna indica que el *output*₁ supera ligeramente al *output*₂ en lo referente a Cura.

El diagrama <33> contiene las matrices que hemos construido. Usando el método de pares comparados, hemos creado cuatro matrices de puntajes (1, 2, 3, 4) y una matriz de pesos, (5). La jerarquización final de los *outputs* de los hospitales se produce efectuando una serie de operaciones aritméticas sobre estas cinco matrices. Primero normalizamos las columnas y promediamos las filas de cada matriz. Normalizamos las columnas de una matriz dividiendo cada celda entre la suma de la columna de esa celda. Promediamos las filas de una matriz sumando los números de cada fila y dividiendo el resultado entre el número de columnas. Por ejemplo, abajo vemos que al normalizar y promediar la matriz Cura indicada con el número (1), la matriz se reduce de tamaño (se compacta) y se convierte en una matriz de una columna (es decir, un vector). Hemos indicado esta columna con el título Cura en la matriz (6). Las matrices (2), (3), (4) sufren una transformación similar, y se transforman en los vectores o columnas Educación, Prevención y Investigación de la matriz (6). En cuanto a la matriz de pesos numerada (5), podemos ver que al ser normalizada y promediada, ella también se compacta generando el vector (7):

<33>



El vector (8) titulado Jerarquía es la matriz que consiste en los puntajes finales de los tres *outputs*, puntajes que utiliza Ms. Major para condicionar el modelo DEA, esto es los de <27>. Para conseguir este vector sólo hay que multiplicar las dos matrices compactadas (6) y (7).

Mencionamos arriba que la inclusión de juicios de valor conlleva dos problemas: (1) cómo efectuar la síntesis de los juicios y (2) cómo eliminar las incoherencias. Hasta ahora hemos ilustrado la solución al problema (1), mostrando cómo las comparaciones por pares hechas por un individuo se pueden resumir en un vector de jerarquía donde cada opción tiene asignado un valor. De manera análoga, con el software de AHP Expert Choice, se puede también sintetizar los juicios de valor hechos por un grupo de individuos. De hecho Expert Choice tiene unas maquinillas de votación para lograr este objetivo. En cuanto al problema (2), este problema también es resoluble en AHP. Veamos de qué se trata. No es fácil mantener la coherencia de las comparaciones por pares si el

número de opciones es grande. Por ejemplo, si para Ms. Major i es 2 veces más importante que j y j es 3 veces más importante que k , i debería ser para Ms. Major $3 \times 2 = 6$ veces más importante que k . En efecto algunos de los pares comparados de Ms. Major en <31> son inconsistentes. Estas pequeñas inconsistencias son comunes y afortunadamente no causan serias dificultades. Como las inconsistencias son medibles, AHP usa un índice que da la alerta cuando la inconsistencia es demasiado grande (Expert Choice también provee la opción de corregir las inconsistencias automáticamente). Concretamente, Saaty calcula para cada matriz de pares comparados un índice de consistencia CI y un índice de ruido aleatorio RI . Si la proporción de CI a RI es suficientemente pequeña, entonces es probable que las comparaciones del agente decisonal fueron lo bastante consistentes como para ser útiles. Saaty sugiere que si $CI/RI < 10\%$, entonces el grado de consistencia es satisfactorio, mientras que si $CI/RI > 10\%$, existen serias inconsistencias y AHP puede que no rinda resultados sig-

nificativos. En el ejemplo de Jane para la matriz de los pesos $\langle 31 \rangle$ $CI/RI = 0.159/0.90 = 0.0177$, que es mucho menor que 10%. Por lo tanto, no exhibe inconsistencias serias.

Conclusión

La combinación DEA-AHP hace posible la incorporación de juicios de valor subjetivos a una jerarquización basada en datos objetivos. La combinación DEA-AHP impone límites realistas a los niveles de *inputs* y *outputs* que DEA calcula para maximizar la eficiencia de la entidad. DEA-AHP es una versión más realista y más útil de DEA.

Bibliografía

Albright, C. y otros (2001): *Practical Management Science*. California: Duxbury-Thomson Learning.

Anderson, D. y otros (1999): *Métodos cuantitativos para los negocios*. Mexico D.F: International Thomson Editores..

Beasley, J.E. (2004): "O-R Notes: DEA", mscmga.ms.ic.ac.uk/jeb/

Bowling, W. (2004): "Measuring Performance: An Introduction to Data Envelopment Analysis", llanes.panam.edu/edul8305/papers/introtodea.pdf.

Charnes, A. y otros (1978): "Measuring the efficiency of decision making units". *European Journal of Operations Research*, 2(6): 429-44.

Charnes, A. y otros (1979): "Short communication: measuring the efficiency of decision making units". *European Journal of Operational Research*, 3(4): 339.

Charnes, A. y otros (1980): "The distribution of DMU efficiency measures - appendix to management science relations for evaluation and management accountability". *Journal of Enterprise Management*, 2(2): 160-162.

Charnes, A. y otros (1981): "Evaluating program and managerial efficiency: An application of data envelopment analysis to program follow through." *Management Science*, 27(6): 668-697.

Charnes, A. y otros (1982): "A multiplicative model for efficiency analysis". *Socio-Economic Planning Sciences*, 16(5): 223-224.

Charnes, A. y otros (1983): "Invariant multiplicative efficiency and piecewise Cobb-Douglas envelopments". *Operations Research Letters*, 2(3): 101-103.

Charnes, A. y otros (1985): "A developmental study of data envelopment analysis in measuring the efficiency of maintenance units in the U.S. Air Forces". *Annals of Operations Research*, R. Thompson and R. M. Thrall, 2: 95-112.

Charnes, A. y otros (1985): "Sensitivity and stability analysis in DEA". *Annals of Operations Research*, R. Thompson and R. M. Thrall, 2: 139-156.

Charnes, A. y otros (1985): "Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions". *Journal of Econometrics*, 30(1/2): 91-107.

Charnes, A. y W. W. Cooper (1985): "Preface to topics in data envelopment analysis". *Annals of Operations Research*, R. Thompson and R. M. Thrall, 2: 59-94.

- Charnes, A. y otros (1986): "Classifying and characterizing efficiencies and inefficiencies in data development analysis". *Oper. Res. Lett.* (Netherlands), 5(3): 105-10.
- Charnes, A. y otros (1989): "Testing for organizational slack with R. Banker's game theoretic formulation of DEA". *Research in Governmental and Nonprofit Accounting*, JAI Press, 5: 211-230.
- Charnes, A. y otros (1989): "Comparisons of DEA and existing ratio and regression systems for effecting efficiency evaluations of regulated electric cooperatives in Texas". *Research in Governmental and Nonprofit Accounting*, JAI Press, 5: 187-210.
- Charnes, A. y otros (1989): "Cone ratio data envelopment analysis and multi-objective programming". *International Journal of Systems Science*, 20(7): 1099-118.
- Charnes, A. y otros (1989): "Using DEA to evaluate relative efficiencies in the economic performance of Chinese cities". *Socio-Economic Planning Sciences*, 23, 325-344.
- Charnes, A. y otros (1989): "Cone ratio data envelopment analysis and multi-objective programming". *International Journal of Systems Science*, 20(7): 1099-118.
- Charnes, A. y otros (1990): "Polyhedral cone-ratio DEA models with an illustrative application to large commercial banking". *Journal of Econometrics*, 30, 91-107.
- Charnes, A. y L. Neralic (1990): "Sensitivity analysis of the additive model in data envelopment analysis". *European Journal of Operational Research*, 48(3): 332-41.
- Charnes, A. y otros (1991): "Relations between half-space and finitely generated cones in polyhedral cone-ratio DEA models". *International Journal of Systems Science*, 22(11): 2057-77.
- Charnes, A. y otros (1992): "Sensitivity of efficiency classifications in the additive model of data envelopment analysis". *International Journal of Systems Science*, 23(5): 789-98.
- Charnes, A. y otros, eds. (1994): *Data envelopment analysis: Theory, methodology and applications*. Boston: Kluwer.
- Foreman, E. y M.A. Selly (2004): "Decision by objective". Website de Expert Choice, mdm.gwu.edu/Forman/DBO.pdf.
- Saaty, T. L. (2000): *Decision making for leaders*. Pittsburgh, PA.:University of Pittsburg, RWS Publications.